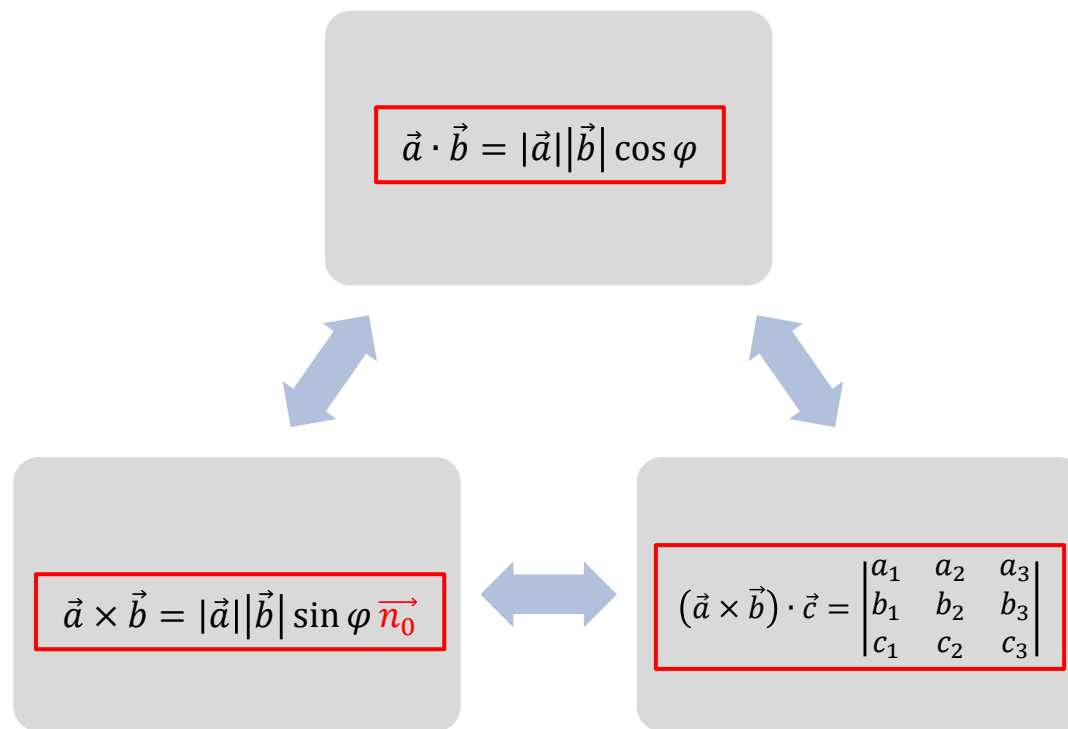


Факултет заштите на раду у Нишу
Предавања из предмета МАТЕМАТИКА
ВЕКТОРИ – II део



- Скаларни производ вектора
- Векторски производ вектора
- Мешовити производ вектора
- Примене

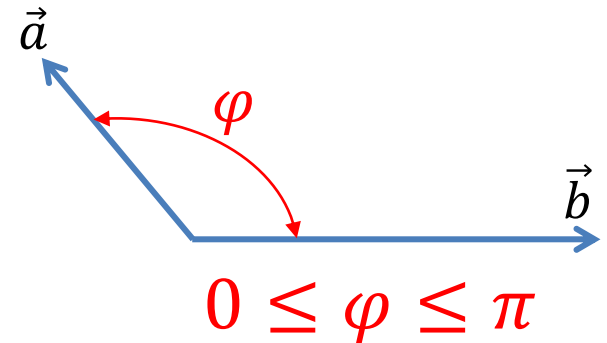
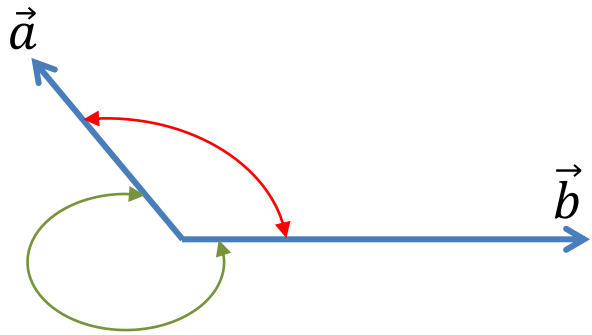
Предметни наставник:
др Милош Цветковић

Скаларни производ вектора - дефиниција

Скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је скалар који означавамо са $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и дефинишемо овако:

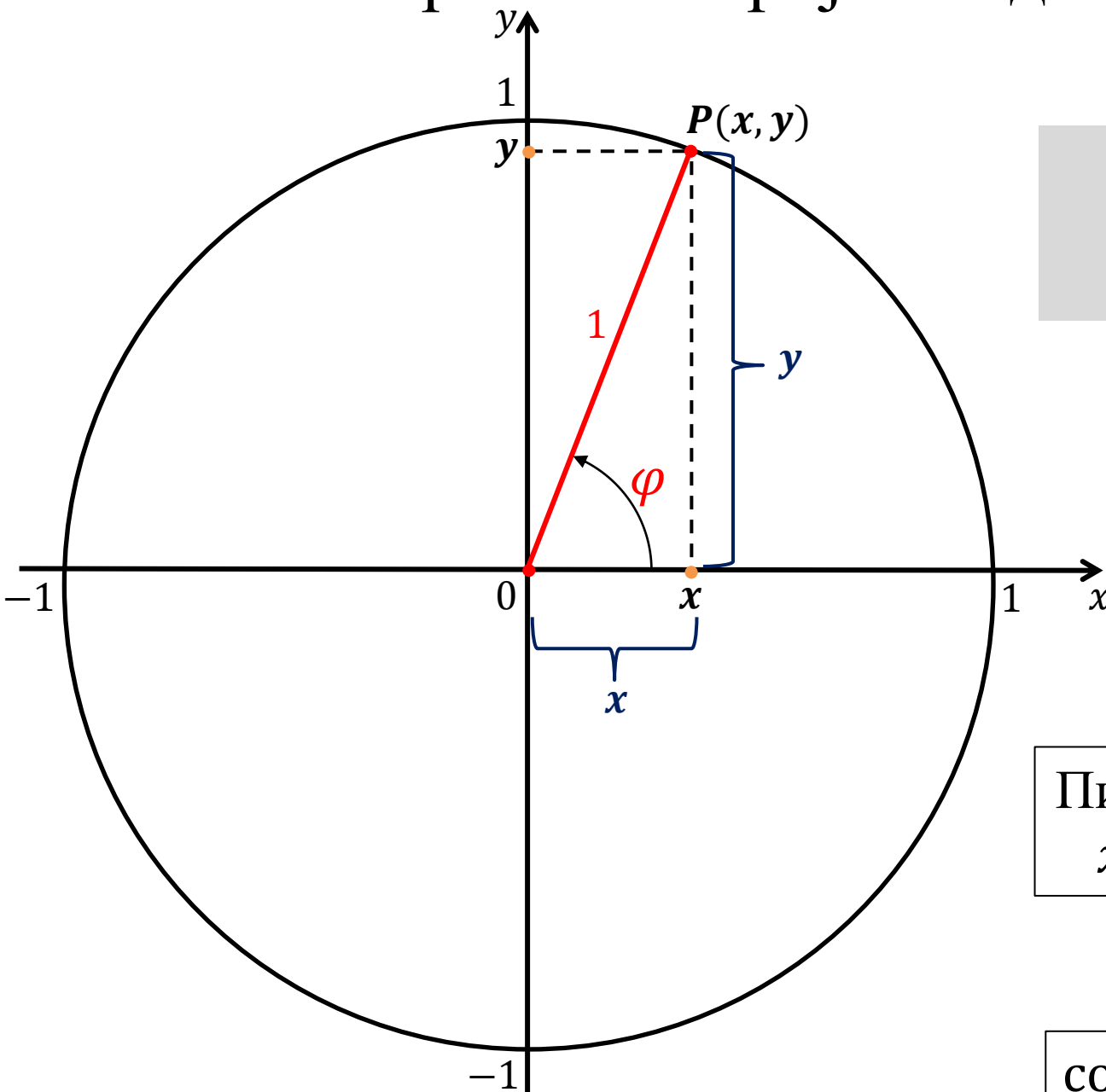
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

Овде је φ угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Увек узимамо да је $0 \leq \varphi \leq \pi$, тј. за угао φ увек бирамо мањи од углова које дати вектори образују.



Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образују два угла: један је на слици лево означен црвеним луком, други зеленим луком. Вектор обележен црвеним луком је мањи од та два угла и њега ћемо сматрати углом између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Тригонометрија - подсетник



$$\sin \varphi = y$$

$$\cos \varphi = x$$

Питагорина теорема:

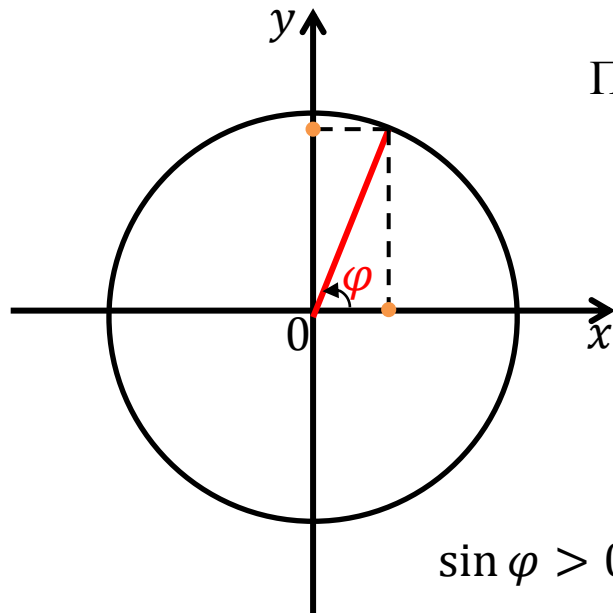
$$x^2 + y^2 = 1^2 = 1$$



$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

Тригонометријски круг

Тригонометрија - подсетник



Први квадрант

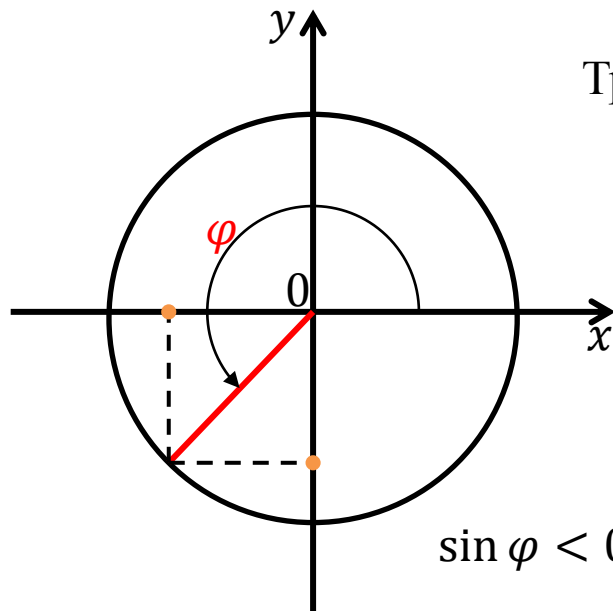
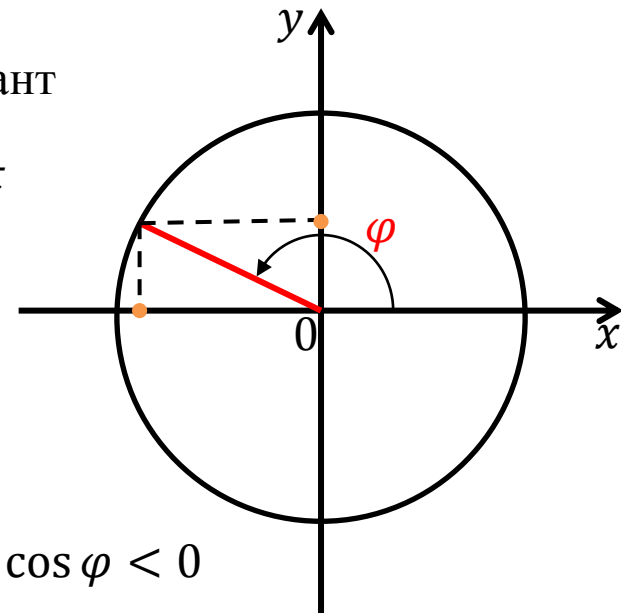
$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \varphi > 0, \quad \cos \varphi > 0$$

Други квадрант

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$$

$$\sin \varphi > 0, \quad \cos \varphi < 0$$



Трећи квадрант

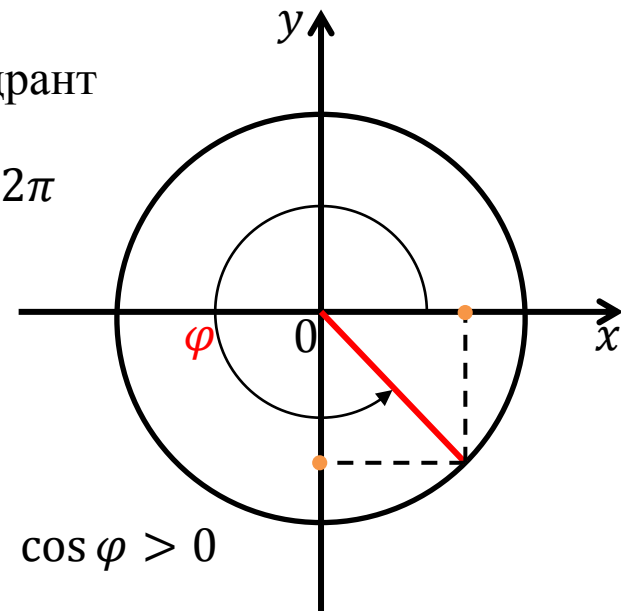
$$\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin \varphi < 0, \quad \cos \varphi < 0$$

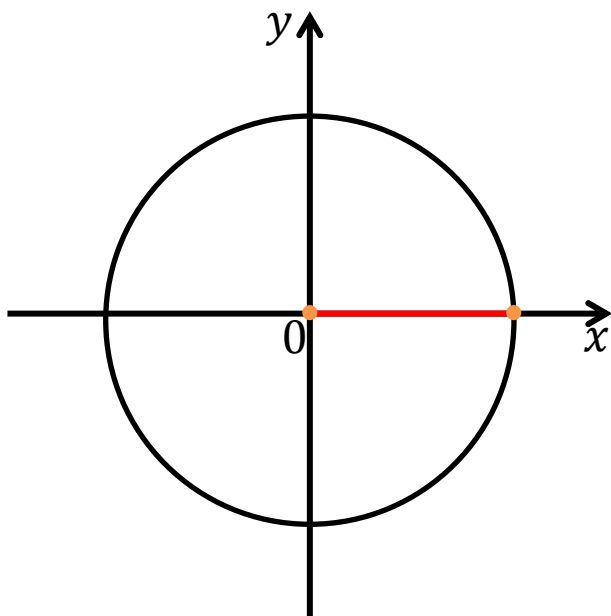
Четврти квадрант

$$\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$$

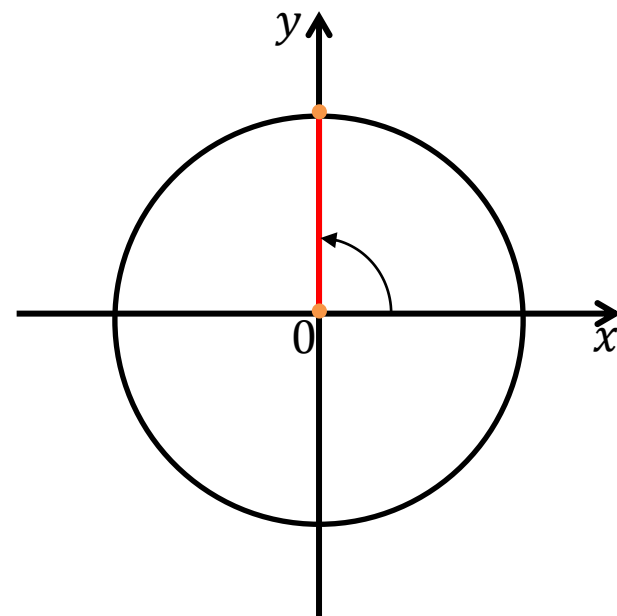
$$\sin \varphi < 0, \quad \cos \varphi > 0$$



Тригонометрија - подсетник



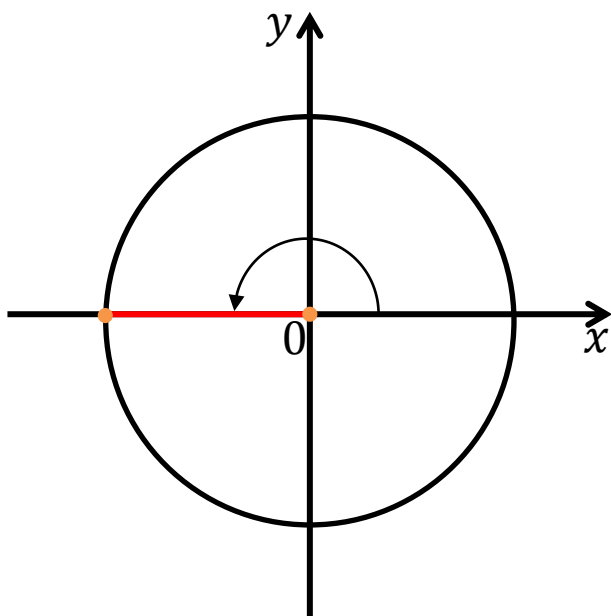
$$\varphi = 0$$
$$\sin 0 = 0 \quad \cos 0 = 1$$



$$\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin 90^\circ = 1 \quad \cos 90^\circ = 0$$



$$\varphi = \pi = 180^\circ$$

$$\sin \pi = 0 \quad \cos \pi = -1$$

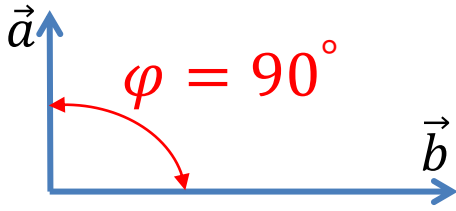
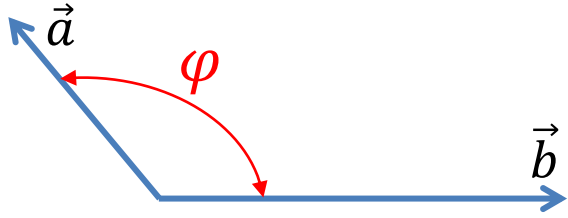
$$\sin 180^\circ = 0 \quad \cos 180^\circ = -1$$

Скаларни производ вектора

$0 \leq \varphi < 90^\circ$	$\varphi = 90^\circ$	$90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$
$\cos \varphi > 0$	$\cos \varphi = 0$	$\cos \varphi < 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

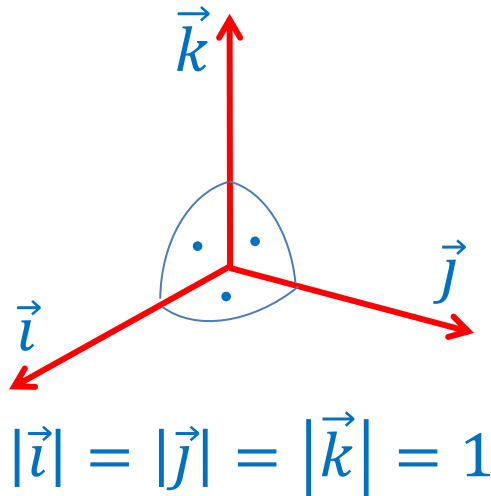
Интензитети вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$, су позитивни бројеви. То значи да ће скаларни производ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ бити истог знака као и $\cos \varphi$.

φ је оштар угао	$\varphi = 90^\circ$	φ је туп угао
 $\cos \varphi > 0$	 $\cos \varphi = 0$	 $\cos \varphi < 0$
$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

Ако су вектори нормални један на други онда је њихов скаларни производ једнак нули: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Важи и обрнуто (претпостављамо да је $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90^\circ.$$

Скаларни производ вектора - ортови



$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| |\vec{i}| \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}| |\vec{j}| \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}| |\vec{k}| \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

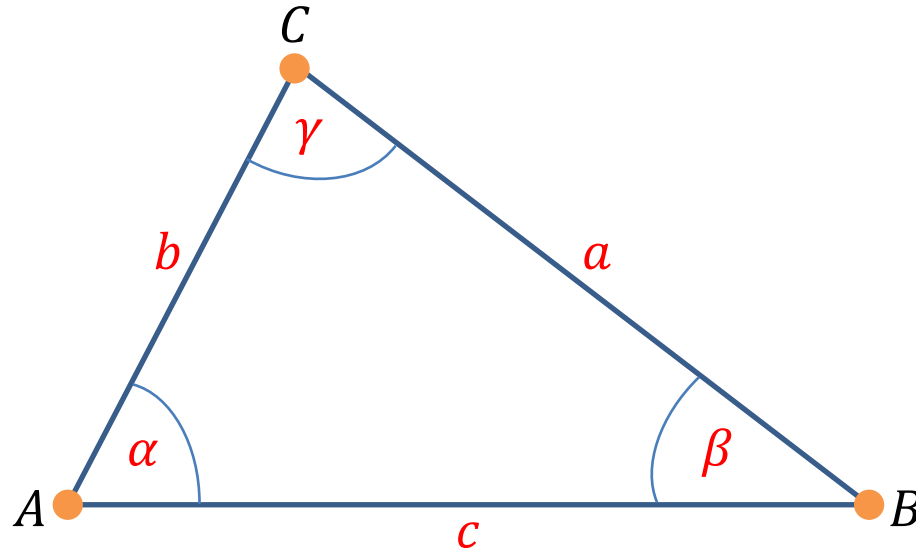
Вектори $\vec{i}$ и $\vec{j}$ су међусобно нормални, па је $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

Из истих разлога имамо:

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{i} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$

$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$	$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$	$\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$
$\vec{j} \cdot \vec{i} = 0$	$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$	$\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$
$\vec{k} \cdot \vec{i} = 0$	$\vec{k} \cdot \vec{j} = 0$	$\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

Косинусна теорема - подсетник

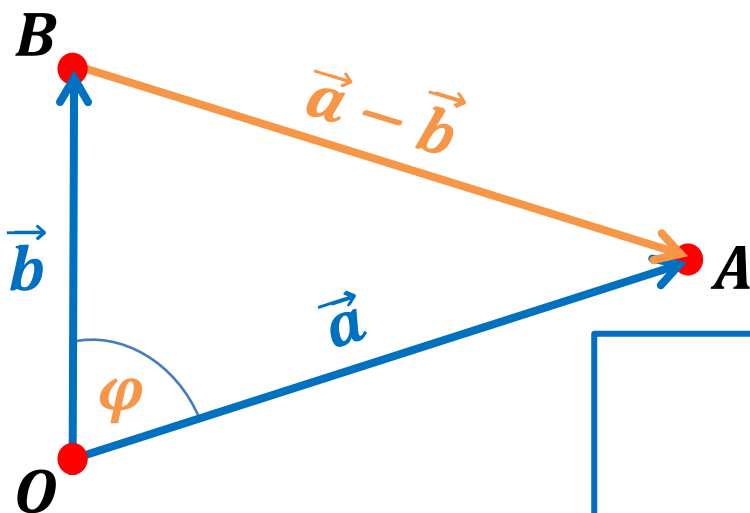


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Скалярни производ вектора



Посматрајмо троугао OAB :

Дужина странице OA је $|\vec{a}|$

Дужина странице OB је $|\vec{b}|$

Дужина странице AB је $|\vec{a} - \vec{b}|$

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$-\vec{b} = (-1)\vec{b} = (-b_1, -b_2, -b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1 + (-b_1), a_2 + (-b_2), a_3 + (-b_3))$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

Примена косинусне теореме на троугао OAB :

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\overbrace{\cos \varphi}^{\vec{a} \cdot \vec{b}}$$

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\begin{aligned} a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 + a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2 = \\ = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3 = -2\vec{a} \cdot \vec{b} \quad (\text{делимо са } -2 \text{ и леву и десну страну})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Скаларни производ вектора

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \longrightarrow$$

a_1 је прва или x — координата вектора $\vec{a}$

a_2 је друга или y — координата вектора $\vec{a}$

a_3 је трећа или z — координата вектора $\vec{a}$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad \longrightarrow$$

b_1 је прва или x — координата вектора $\vec{b}$

b_2 је друга или y — координата вектора $\vec{b}$

b_3 је трећа или z — координата вектора $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Да би се добио скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, поступа се овако: помноже се x — координате тих вектора и добија се број $a_1 b_1$, затим се помноже y — координате тих вектора и добија се број $a_2 b_2$, и на крају се множе z — координате тих вектора и добија се број $a_3 b_3$. Сада се сва три тако добијена броја $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ и $a_3 b_3$ саберу.

Скалярни производ вектора

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \longrightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad \longrightarrow \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Особине скаларног производа

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$1^\circ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \quad \vec{b} \cdot \vec{a} = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$2^\circ (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 = \\ &= (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) + (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

$$3^\circ (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

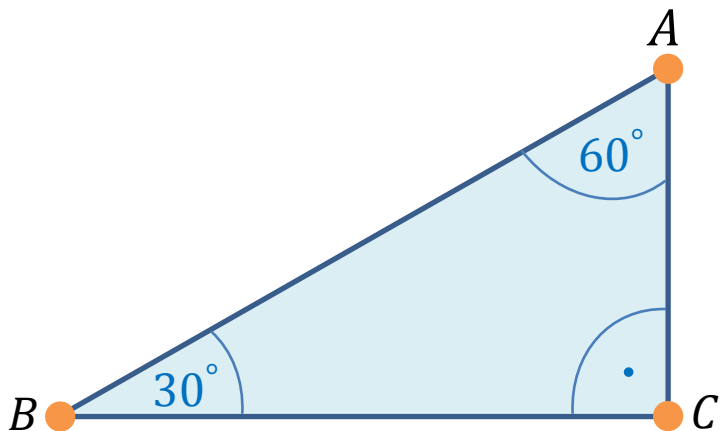
$$\begin{aligned} (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} &= (\lambda a_1)b_1 + (\lambda a_2)b_2 + (\lambda a_3)b_3 = \lambda(a_1 b_1) + \lambda(a_2 b_2) + \lambda(a_3 b_3) = \\ &= \lambda(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

$$4^\circ |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \quad (\text{интензитет вектора } \vec{a})$$

Угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{a}$ је $\varphi = 0^\circ$.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 \cdot 1 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Тригонометрија – опет мали подсетник



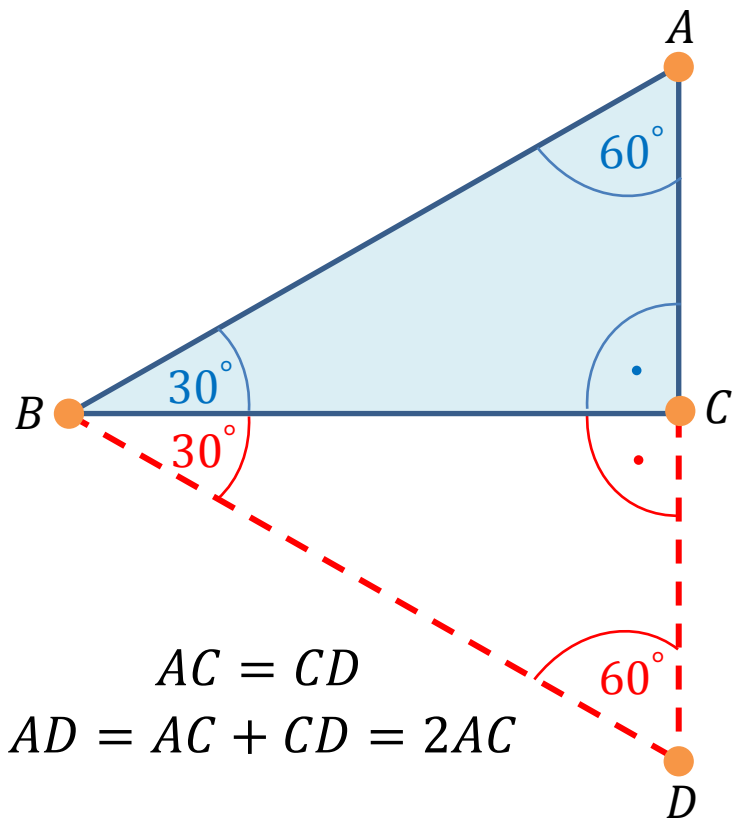
Правоугли троугао ABC има углове од 30° , 60° и 90° .

AB је хипотенуза троугла ABC

AC је једна катета троугла ABC
(AC је **мања катета** троугла ABC)

BC је друга катета троугла ABC

$$AB = 2AC \quad \longrightarrow$$



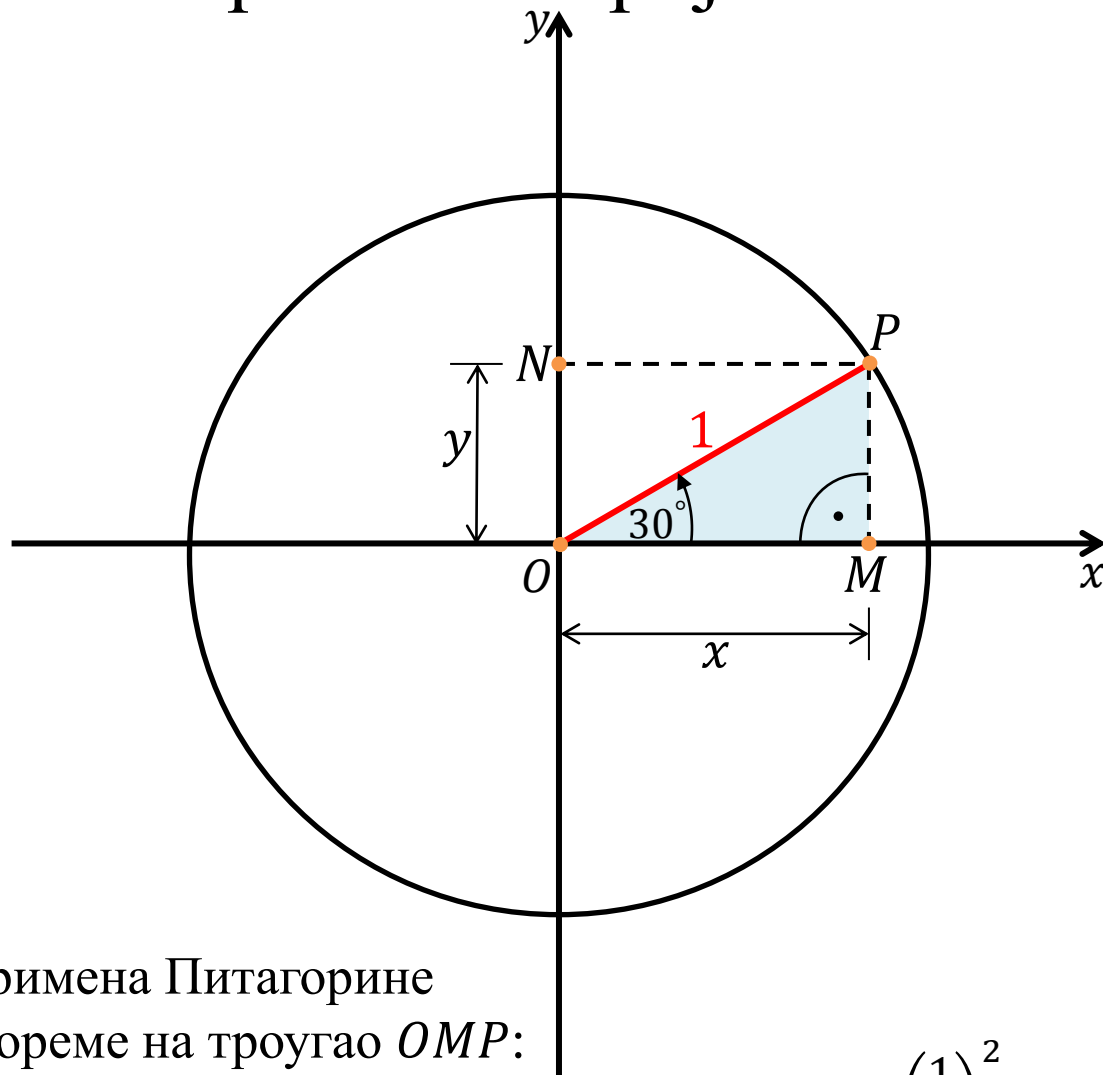
$$AC = CD$$
$$AD = AC + CD = 2AC$$

Троугао ABD је једнакостраничан, па су му све странице исте дужине. Специјално:

$$AB = AD = 2AC$$

Код правоуглог троугла са угловима од 30° , 60° и 90° , хипотенуза је два пута већа од мање катете.

Тригонометрија – опет мали подсетник



$$OM = x, \quad ON = MP = y$$

$$\sin 30^\circ = y, \quad \cos 30^\circ = x$$

Троугао OMP има углове од $30^\circ, 60^\circ$ и 90°

↓
Хипотенуза OP је два пута
већа од мање катете MP

$$\downarrow$$
$$OP = 2MP$$

$$\downarrow$$
$$1 = 2y$$

$$\downarrow$$
$$y = \frac{1}{2}$$

Примена Питагорине
теореме на троугао OMP :

$$OM^2 + MP^2 = OP^2, \quad x^2 + y^2 = 1^2, \quad x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1, \quad x^2 = \frac{3}{4}, \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Скаларни производ вектора - примери

Пример:

Дати су вектори $\vec{u} = (-3, 0, 4)$ и $\vec{v} = (2, 4, \frac{1}{2})$. Наћи скаларни производ $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3) \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot \frac{1}{2} = -6 + 0 + 2 = -4$$

Пример: Дати су вектори $\vec{u} = -5\vec{j}$ и $\vec{v} = -\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}$. Наћи скаларни производ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ и угао између вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

$$\vec{u} = (0, -5, 0) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \cdot (-1) + (-5) \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 0 = 0 + 5\sqrt{3} + 0 = 5\sqrt{3}$$

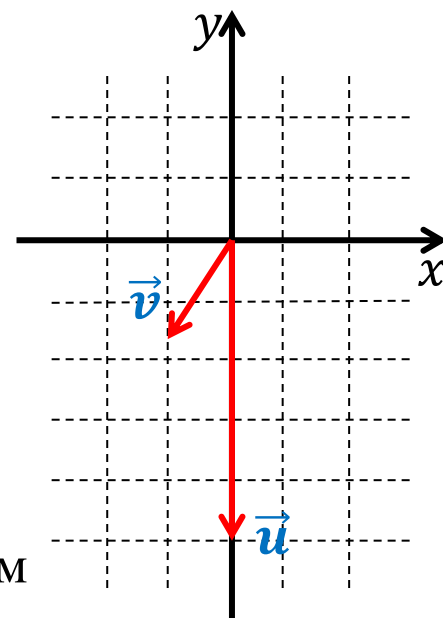
$$\vec{v} = (-1, -\sqrt{3}, 0)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + (-5)^2 + 0^2} = \sqrt{0 + 25 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 3 + 0} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{5\sqrt{3}}{5 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

На слици десно смо скицирали векторе $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Рачунским путем смо нашли да угао између вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ износи $\varphi = 30^\circ$, и то је у складу са оним што видимо на слици.



Скаларни производ вектора - примери

Пример: Дати су вектори $\vec{u} = (4, -2, -4)$ и $\vec{v} = (1, -2, 2)$. Да ли су вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ међусобно ортогонални или нису?

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + (-4) \cdot 2 = 4 + 4 - 8 = 0$$

Како је скаларни производ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ једнак нули, закључујемо да су вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ међусобно ортогонални.

Пример: Наћи интензитет вектора $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ ако је $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = \sqrt{3}$ и $\varphi = \frac{\pi}{6}$, где је φ угао између вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(\vec{p} - 2\vec{q}) \cdot (\vec{p} - 2\vec{q})} = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p} - 2(\vec{p} \cdot \vec{q}) - 2(\vec{q} \cdot \vec{p}) + 4(\vec{q} \cdot \vec{q})}$$

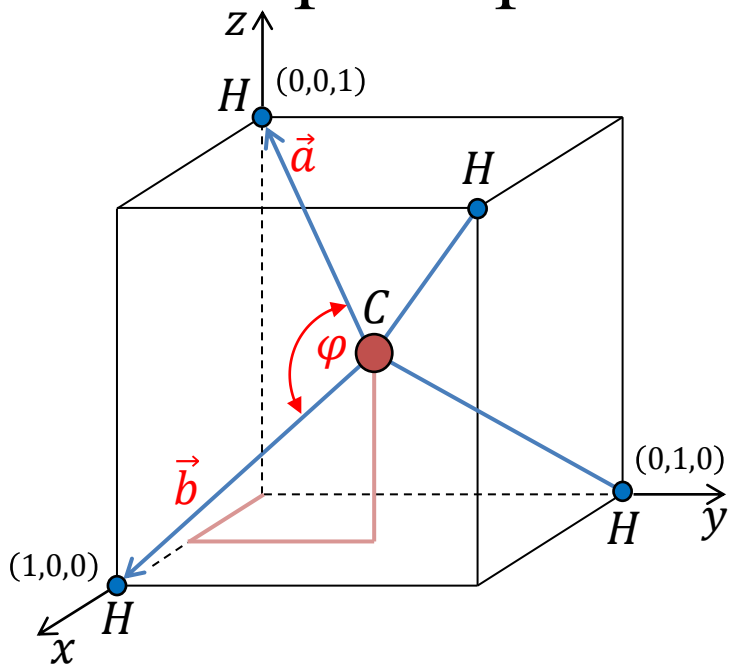
$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{p}|^2 - 4(\vec{p} \cdot \vec{q}) + 4|\vec{q}|^2}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}| \cos \varphi = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 + 4 \cdot (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 - 12 + 12} = \sqrt{4} = 2$$

Скаларни производ вектора – угао везе у метану

Хемијска формула метана: CH_4



Геометрија молекула метана: у центру замишљене коцке се налази атом угљеника C ; четири атома водоника се налазе у одговарајућим теменима те замишљене коцке.

Координате атома угљеника C : $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Вектор $\vec{a}$	
Почетак вектора	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
Крај вектора	$(0,0,1)$
Координате вектора	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Вектор $\vec{b}$	
Почетак вектора	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
Крај вектора	$(1,0,0)$
Координате вектора	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{(-\frac{1}{2})\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{\sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \varphi \approx 109,5^\circ$$

За рачунање угла φ користимо калкулатор!

Скаларни производ и координате вектора

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

Нађимо скаларни производ вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{i}$:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{i} &= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot \vec{i} = (a_1 \vec{i}) \cdot \vec{i} + (a_2 \vec{j}) \cdot \vec{i} + (a_3 \vec{k}) \cdot \vec{i} = \\ &= a_1 (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_2 (\vec{j} \cdot \vec{i}) + a_3 (\vec{k} \cdot \vec{i}) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1 \end{aligned}$$

Нађимо скаларни производ вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{j}$:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{j} &= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot \vec{j} = (a_1 \vec{i}) \cdot \vec{j} + (a_2 \vec{j}) \cdot \vec{j} + (a_3 \vec{k}) \cdot \vec{j} = \\ &= a_1 (\vec{i} \cdot \vec{j}) + a_2 (\vec{j} \cdot \vec{j}) + a_3 (\vec{k} \cdot \vec{j}) = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 = a_2 \end{aligned}$$

Нађимо скаларни производ вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{k}$:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{k} &= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot \vec{k} = (a_1 \vec{i}) \cdot \vec{k} + (a_2 \vec{j}) \cdot \vec{k} + (a_3 \vec{k}) \cdot \vec{k} = \\ &= a_1 (\vec{i} \cdot \vec{k}) + a_2 (\vec{j} \cdot \vec{k}) + a_3 (\vec{k} \cdot \vec{k}) = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 = a_3 \end{aligned}$$

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{i}$$

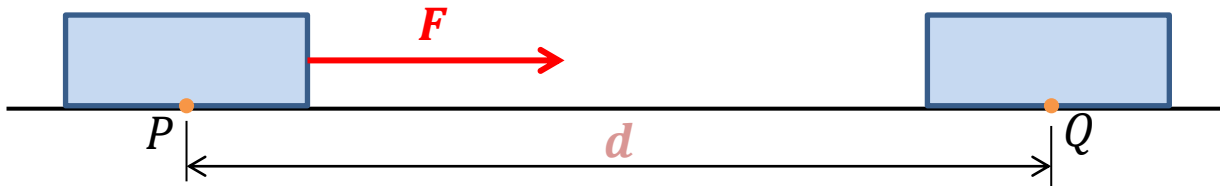
$$a_2 = \vec{a} \cdot \vec{j}$$

$$a_3 = \vec{a} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{a} \cdot \vec{j}) \vec{j} + (\vec{a} \cdot \vec{k}) \vec{k}$$

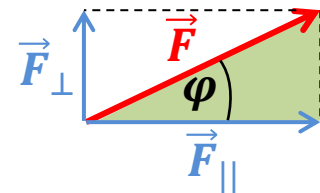
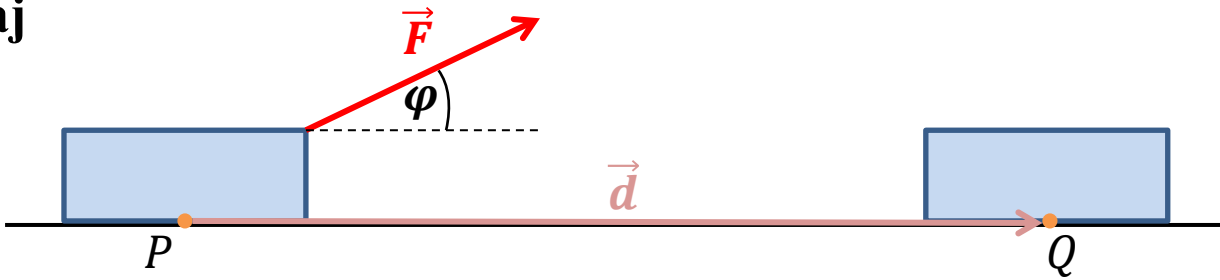
Скаларни производ вектора – рад силе

Случај када је сила паралелна са правцем кретања



Тело се креће од тачке P до тачке Q и при томе пређе пут d . Ако све време кретања на тело делује константна сила F , онда је рад те силе $A = Fd$.

Општи случај



Вектор $\vec{d}$ је вектор помераја.

Угао између вектора $\vec{F}$ и вектора $\vec{d}$ је φ .

Тело прелази пут $PQ = |\vec{d}|$.

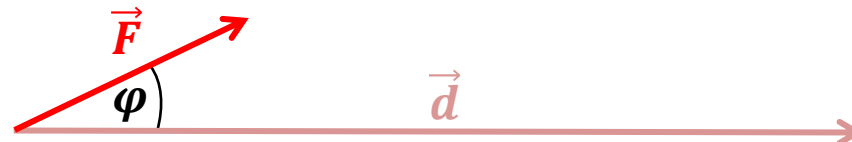
За кретање тела битна је само компонента $\vec{F}_{||}$, тако да рад силе $\vec{F}$ износи: $A = |\vec{F}_{||}||\vec{d}| = (|\vec{F}| \cos \varphi)|\vec{d}| = |\vec{F}||\vec{d}| \cos \varphi = \vec{F} \cdot \vec{d}$

Зелени правоугли троугао:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{F}_{||}|}{|\vec{F}|}$$

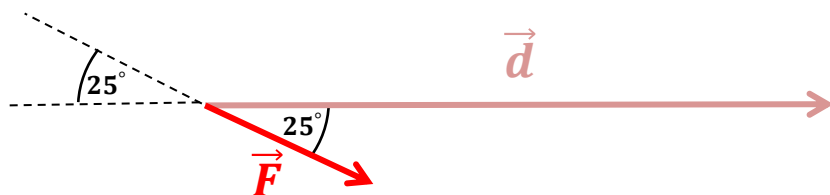
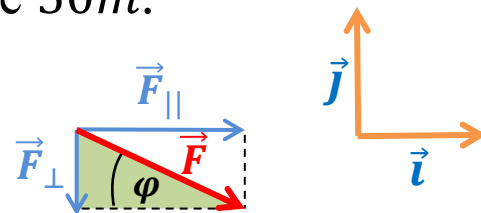
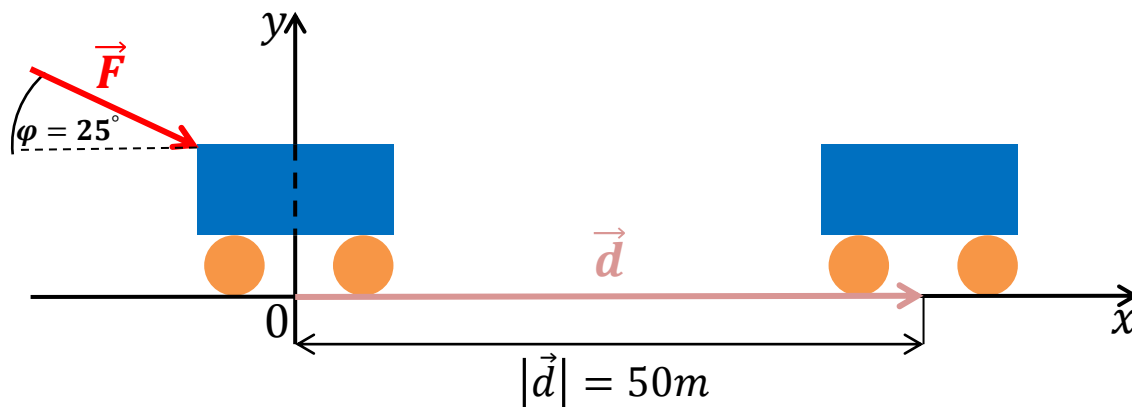
$$|\vec{F}_{||}| = |\vec{F}| \cos \varphi$$

$$A = \vec{F} \cdot \vec{d}$$



Скаларни производ вектора – рад силе

Купац гура колица у супермаркету силом од $35N$ која има оријентацију као на слици. Израчунати рад који изврши купац на путу дужине $50m$.



Зелени правоугли троугао:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{F}_{||}|}{|\vec{F}|} \Rightarrow |\vec{F}_{||}| = |\vec{F}| \cos \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{F}_{\perp}|}{|\vec{F}|} \Rightarrow |\vec{F}_{\perp}| = |\vec{F}| \sin \varphi$$

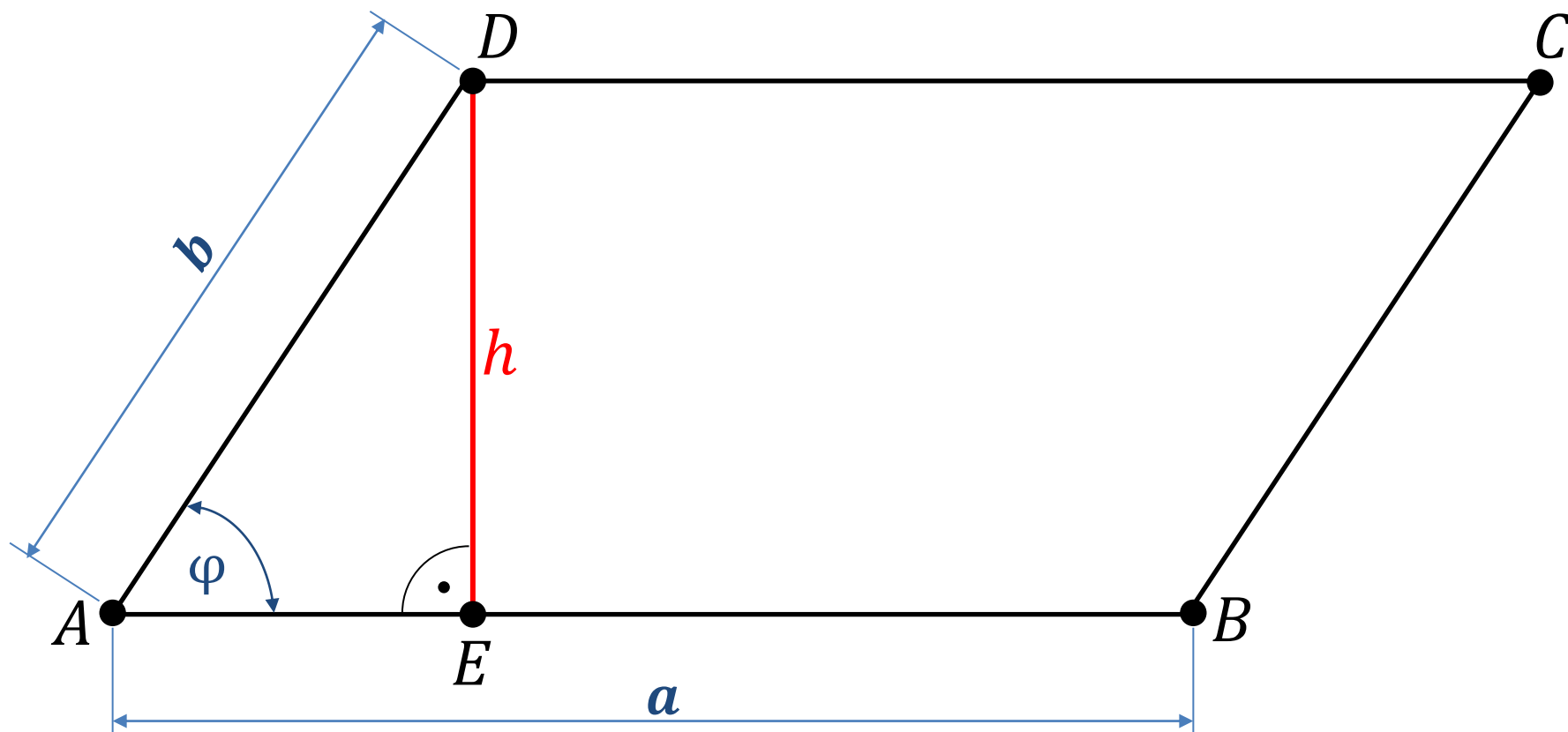
$$\vec{F} = \vec{F}_{||} + \vec{F}_{\perp} = |\vec{F}| \cos \varphi \vec{i} - |\vec{F}| \sin \varphi \vec{j}$$

$$\vec{F} = 35 \cos 25^{\circ} \vec{i} - 35 \sin 25^{\circ} \vec{j}$$

$$\vec{d} = 50 \vec{i}$$

$$A = \vec{F} \cdot \vec{d} = (35 \cos 25^{\circ} \vec{i} - 35 \sin 25^{\circ} \vec{j}) \cdot 50 \vec{i} = 35 \cdot \cos 25^{\circ} \cdot 50 \approx \mathbf{1586J}$$

Површина паралелограма - подсетник

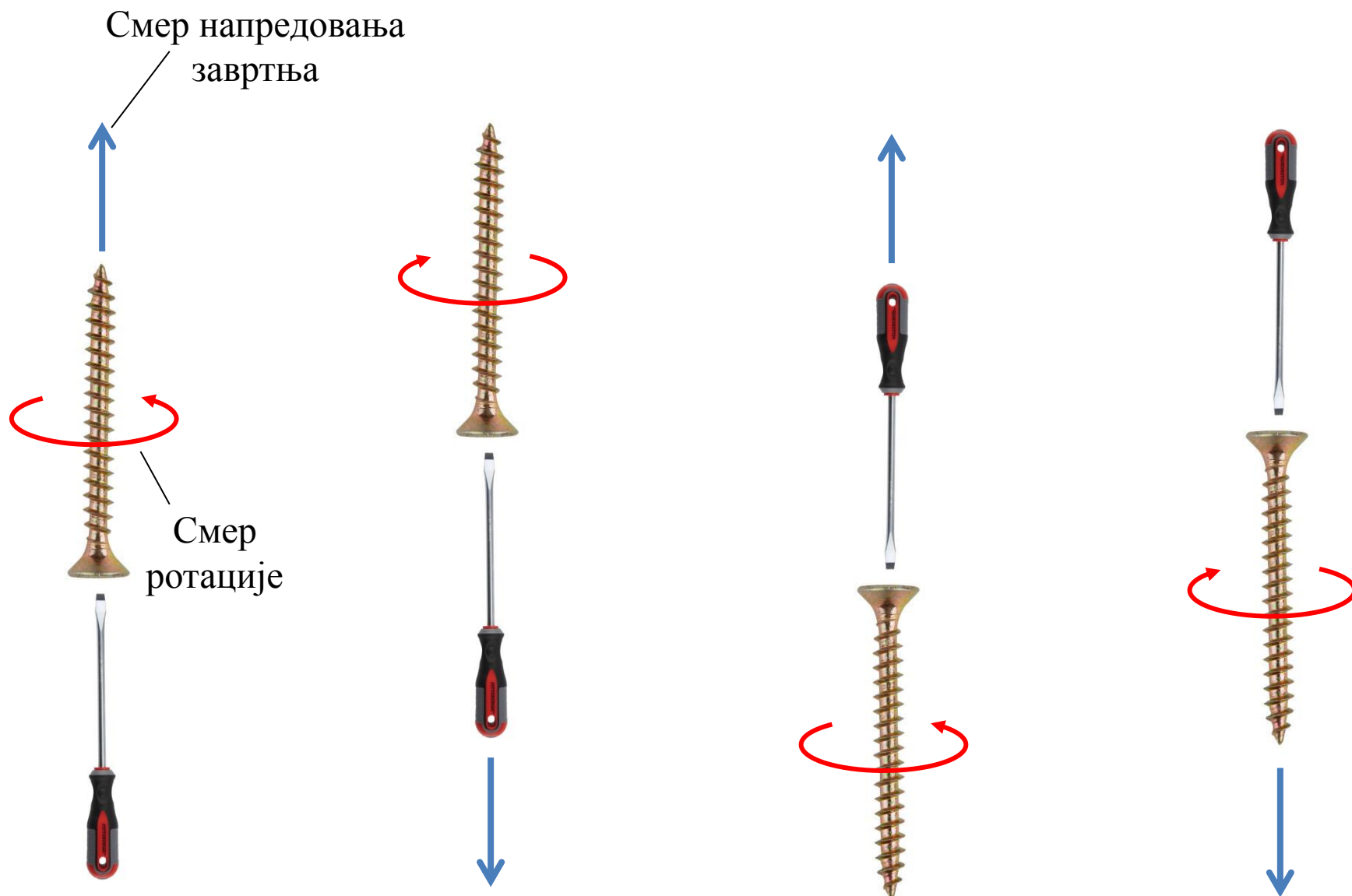


Троугао AED : $\sin \varphi = \frac{h}{b} \longrightarrow h = b \sin \varphi$

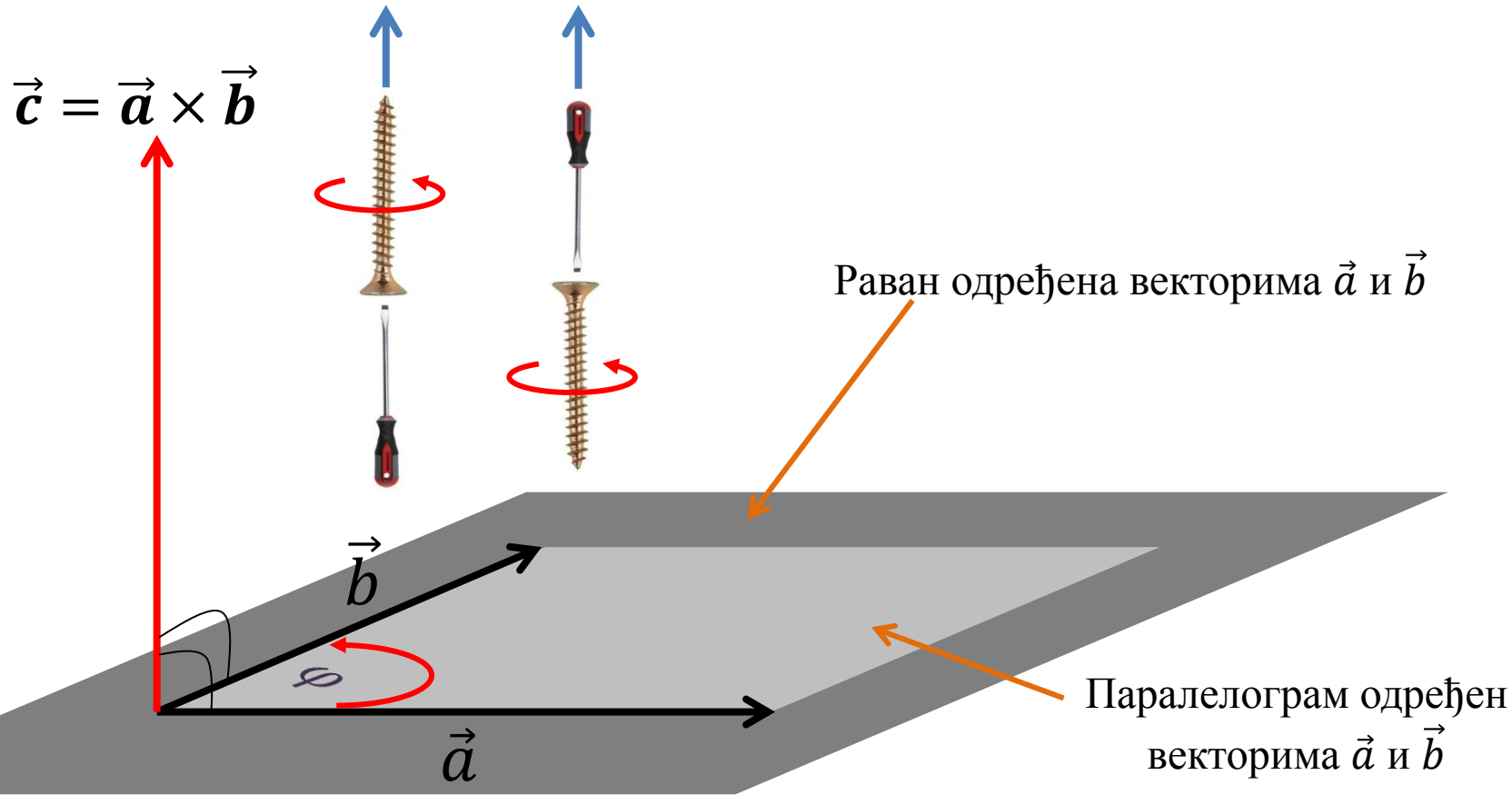
$$P = ah = ab \sin \varphi$$

$$P = ab \sin \varphi$$

Десни завртањ



Векторски производ вектора - дефиниција



Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ који има следећа својства:

- **Правац** вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ је нормалан на раван коју чине вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- **Смер** је одређен **правилом десног завртња** – смер вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ се поклапа са смером напредовања десног завртња који се окреће у смеру од вектора $\vec{a}$ ка вектору $\vec{b}$;
- **Интензитет** је једнак површини паралелограма одређеног векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Векторски производ вектора

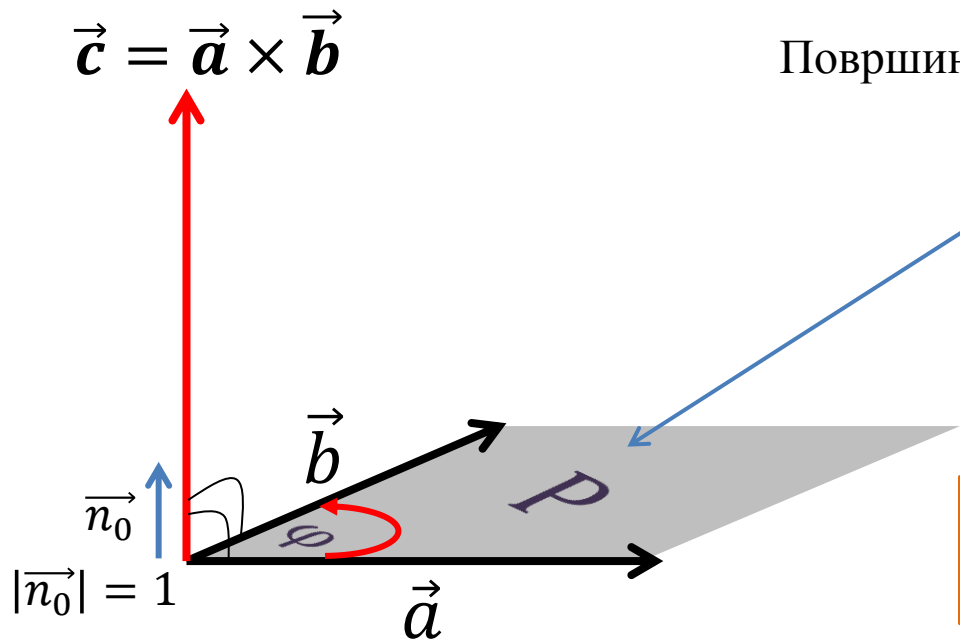
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Површина паралелограма одређеног векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$P = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi \vec{n}_0$$



Специјалан случај $\vec{a} \times \vec{a}$: $|\vec{a} \times \vec{a}| = |\vec{a}| |\vec{a}| \sin 0 = |\vec{a}| |\vec{a}| \cdot 0 = 0$

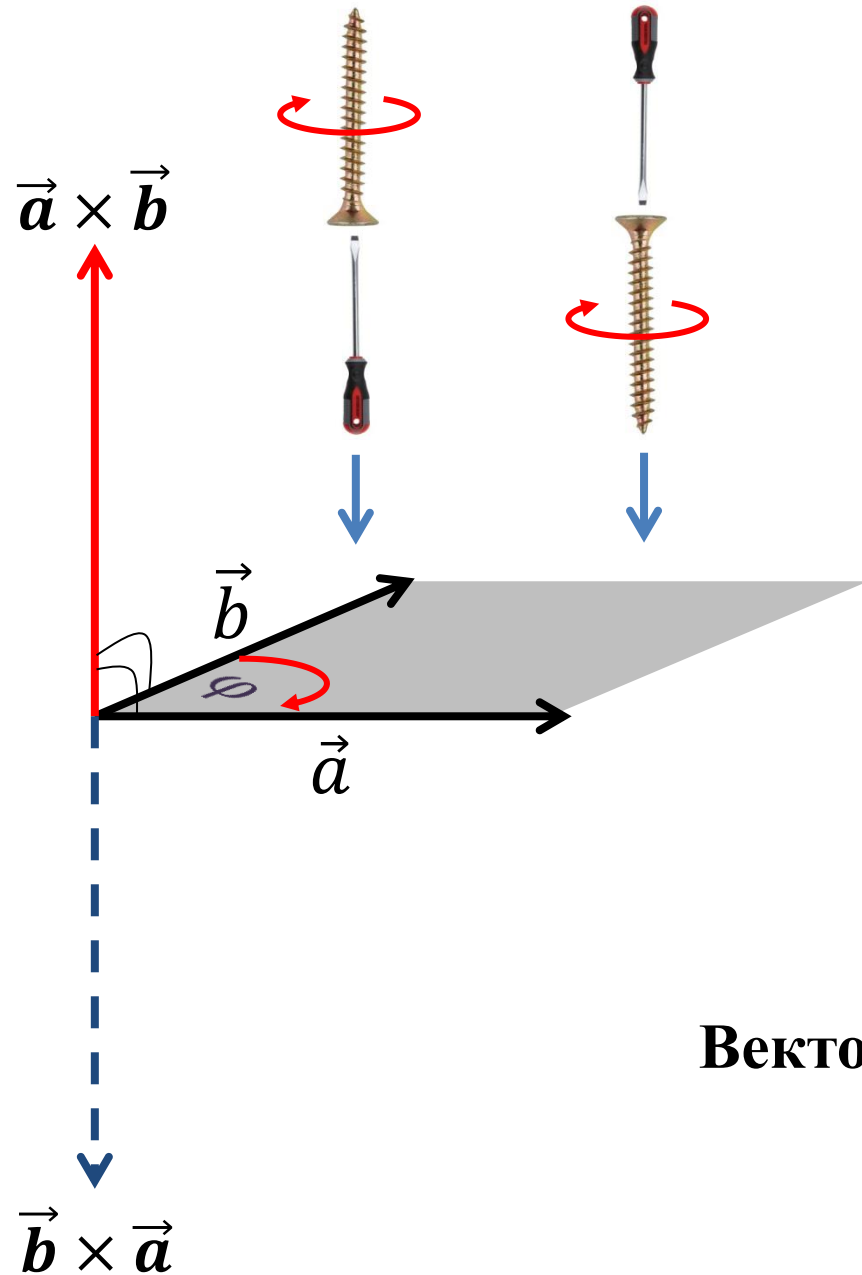
Закључак: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$$

$$\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$$

$$\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

Векторски производ вектора

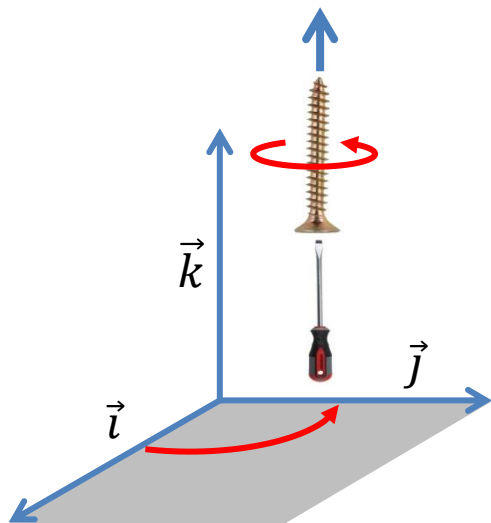


Вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{b} \times \vec{a}$ имају исти правац и интензитет, али су супротних смерова.

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

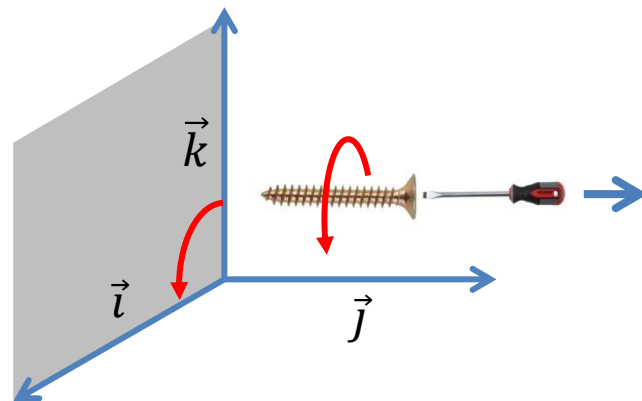
Векторски производ није комутативан!

Векторски производ вектора - ортови



$$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}||\vec{j}| \sin 90^\circ = 1$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$



$$|\vec{k} \times \vec{i}| = |\vec{k}||\vec{i}| \sin 90^\circ = 1$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

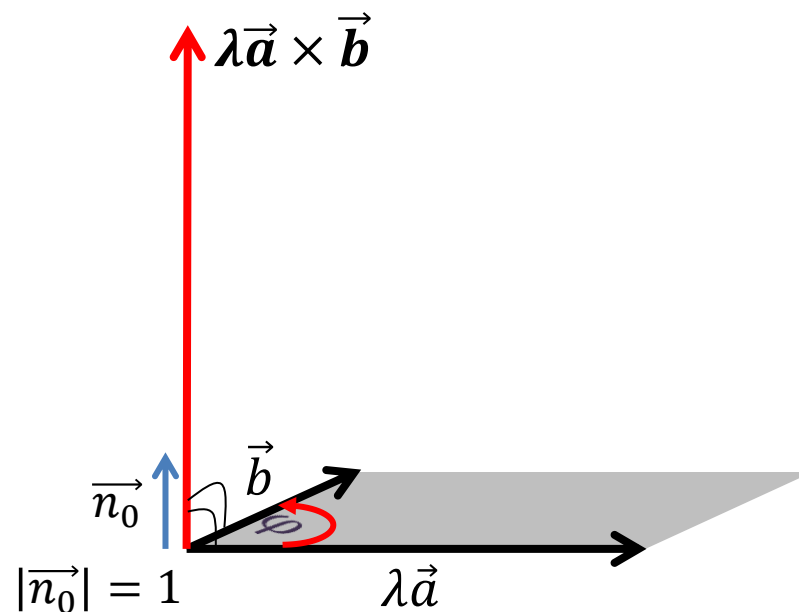
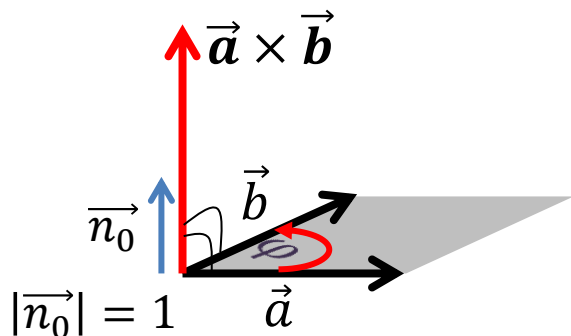
$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Особине векторског производа

$$1^\circ (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

Доказаћемо да је $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ за случај $\lambda > 0$. Тада вектори $\vec{a}$ и $\lambda \vec{a}$ имају исти смер. Такође, угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је једнак углу између вектора $\lambda \vec{a}$ и $\vec{b}$ (тај угао ћемо означити са φ). Приметимо да је $|\lambda| = \lambda$ зато што је $\lambda > 0$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi \vec{n}_0$$



$$\lambda \vec{a} \times \vec{b} = |\lambda \vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi \vec{n}_0 = |\lambda| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi \vec{n}_0 = \lambda |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi \vec{n}_0 = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

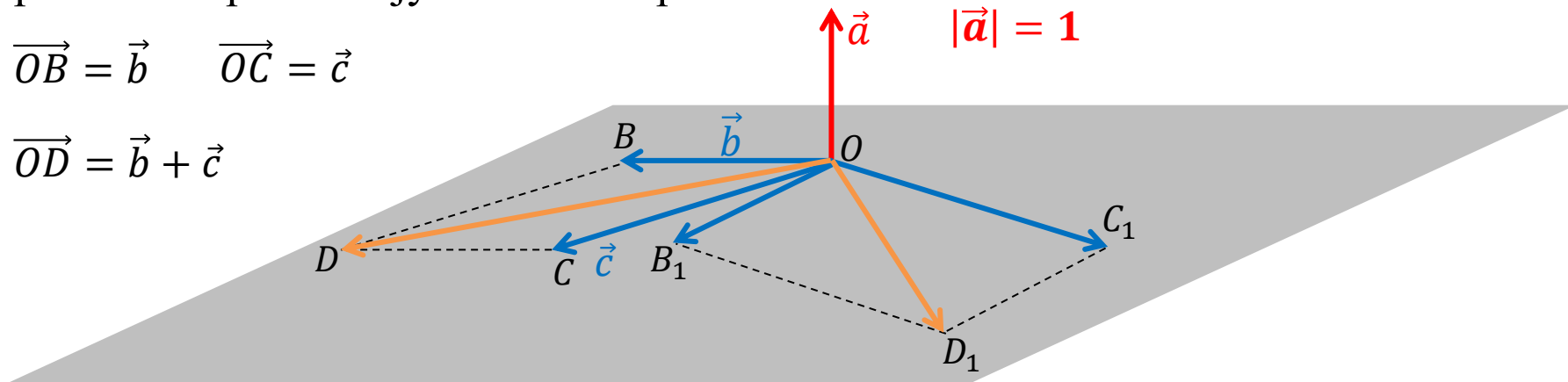
Особине векторског производа

$$2^\circ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad (\text{дистрибутивни закон})$$

Доказ ћемо спровести за специјалан случај када је вектор $\vec{a}$ јединични вектор нормалан на раван коју чине вектори $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b} \quad \overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{OD} = \vec{b} + \vec{c}$$



$$\vec{a} \times \overrightarrow{OB} = \vec{a} \times \vec{b} = \overrightarrow{OB_1} \quad \overrightarrow{OB_1} \perp \overrightarrow{OB} \quad |\overrightarrow{OB_1}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin 90^\circ = |\vec{b}| = |\overrightarrow{OB}|$$

$$\vec{a} \times \overrightarrow{OC} = \vec{a} \times \vec{c} = \overrightarrow{OC_1} \quad \overrightarrow{OC_1} \perp \overrightarrow{OC} \quad |\overrightarrow{OC_1}| = |\vec{a}| |\vec{c}| \sin 90^\circ = |\vec{c}| = |\overrightarrow{OC}|$$

$$\vec{a} \times \overrightarrow{OD} = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{OD_1} \quad \overrightarrow{OD_1} \perp \overrightarrow{OD} \quad |\overrightarrow{OD_1}| = |\vec{a}| |\overrightarrow{OD}| \sin 90^\circ = |\overrightarrow{OD}|$$

Вектори $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$ и $\overrightarrow{OD_1}$ се добијају, редом, ротацијом вектора $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ за 90° у смеру који је супротан од смера кретања казаљке сата, а то значи да је паралелограм $OBDC$ прешао у паралелограм $OB_1D_1C_1$.

$$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Векторски производ и координате вектора

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} = (b_1, b_2, b_3)$$

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Користићемо особине 1° и 2°, као и таблицу

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = a_1b_1(\vec{i} \times \vec{i}) + a_1b_2(\vec{i} \times \vec{j}) + a_1b_3(\vec{i} \times \vec{k}) + \\
 &+ a_2b_1(\vec{j} \times \vec{i}) + a_2b_2(\vec{j} \times \vec{j}) + a_2b_3(\vec{j} \times \vec{k}) + a_3b_1(\vec{k} \times \vec{i}) + a_3b_2(\vec{k} \times \vec{j}) + a_3b_3(\vec{k} \times \vec{k}) = \\
 &= a_1b_2\vec{k} - a_1b_3\vec{j} - a_2b_1\vec{k} + a_2b_3\vec{i} + a_3b_1\vec{j} - a_3b_2\vec{i} = \\
 &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} = \\
 &= \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Векторски производ $\vec{a} \times \vec{b}$ се може изразити помоћу симболичке детерминанте:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$\leftarrow$ Јединични вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$
 $\leftarrow$ Координате вектора $\vec{a}$
 $\leftarrow$ Координате вектора $\vec{b}$

Векторски производ вектора - примери

Пример:

Дати су вектори $\vec{a} = (1, 0, -3)$ и $\vec{b} = (2, 3, 0)$. Наћи векторски производ $\vec{a} \times \vec{b}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$$

Пример: Дати су вектори $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} - \vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$ и $\vec{b} = 6\vec{i} - 12\vec{j} - 6\vec{k}$. Наћи јединични вектор који је нормалан и на вектор $\vec{a}$ и на вектор $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ је нормалан и на $\vec{a}$ и на $\vec{b}$. **Стратегија:** прво ћемо наћи вектор $\vec{a} \times \vec{b}$, а потом његов јединични вектор $\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{a} \times \vec{b}|} (\vec{a} \times \vec{b})$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{3} \\ 6 & -12 & -6 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ -12 & -6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 6 & -6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 6 & -12 \end{vmatrix} = 14\vec{i} + 7\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{14^2 + 7^2 + 0^2} = \sqrt{245} = \sqrt{49 \cdot 5} = 7\sqrt{5}$$

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{a} \times \vec{b}|} (\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{1}{7\sqrt{5}} (14\vec{i} + 7\vec{j}) = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{i} + \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{j}$$

Векторски производ вектора - примери

Пример: Дати су вектори $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$ и $\vec{c} = (2, 1, -1)$. Израчунати вектор $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{a} = (1, 2, 1) \quad \vec{b} \times \vec{c} = (-1, 5, 3)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$$

Пример: Наћи површину паралелограма са теменима $A(0, -1)$, $B(3, 0)$, $C(5, 2)$ и $D(2, 1)$.

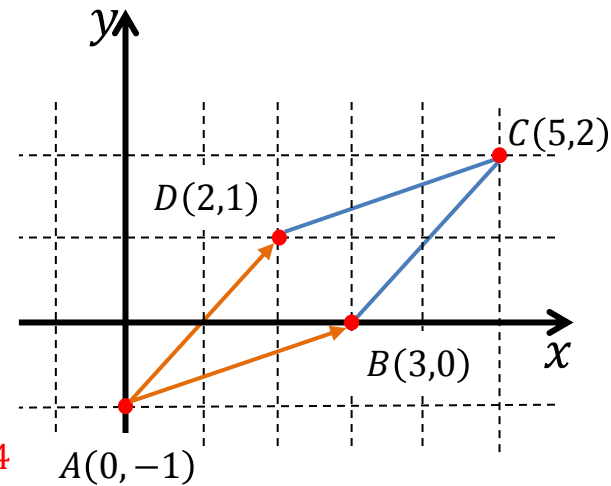
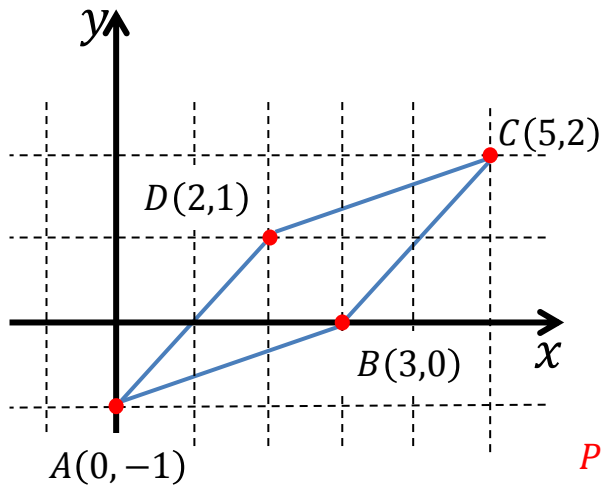
$$\overrightarrow{AB} = (3, 1, 0), \quad \overrightarrow{AD} = (2, 2, 0)$$

$$P = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = 4\vec{k} = (0, 0, 4)$$

$$P = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$$



Идентитет Лагранжа

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

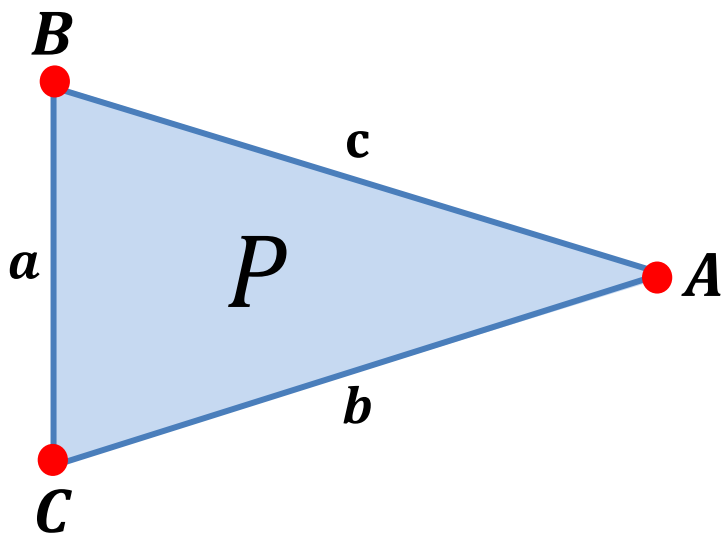
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \varphi = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \varphi$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

Идентитет
Лагранжа

Херонов образац

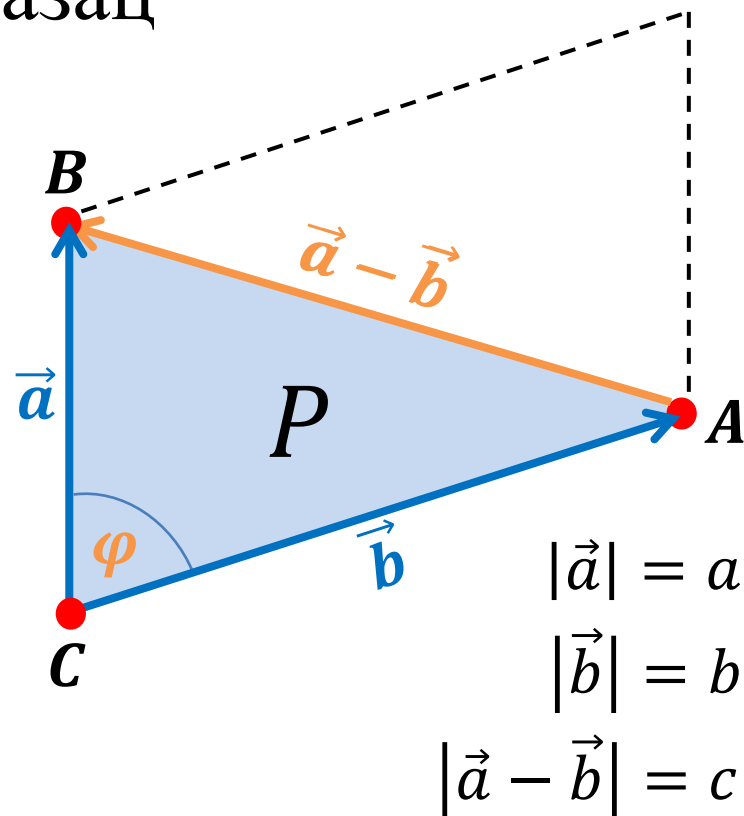


$$P = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| \Rightarrow 2P = |\vec{a} \times \vec{b}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4P^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 \text{ (Сада користимо идентитет Лагранжа)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4P^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$4P^2 = a^2 b^2 - \frac{1}{4} (a^2 + b^2 - c^2)^2$$



$$|\vec{a}| = a$$

$$|\vec{b}| = b$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = c$$

Косинусна теорема:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - c^2)$$

Херонов образац

$$\begin{aligned}4P^2 &= a^2b^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)^2 = \frac{1}{4}(4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2) \\&= \frac{1}{4}(2ab - (a^2 + b^2 - c^2))(2ab + (a^2 + b^2 - c^2)) \\&= \frac{1}{4}(2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2) = \\&= \frac{1}{4}(c^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - c^2)\end{aligned}$$

$$P^2 = \frac{1}{16}(c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c)$$

$$P^2 = \frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{c - a + b}{2} \cdot \frac{c + a - b}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}$$

$$s = \frac{a + b + c}{2} \quad (\text{полуобим троугла})$$

$$P^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$$

$$\frac{c - a + b}{2} = \frac{a + b + c - 2a}{2} = s - a$$

$$\frac{c + a - b}{2} = \frac{a + b + c - 2b}{2} = s - b$$

$$\frac{a + b - c}{2} = \frac{a + b + c - 2c}{2} = s - c$$

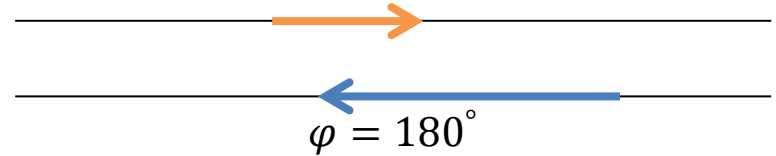
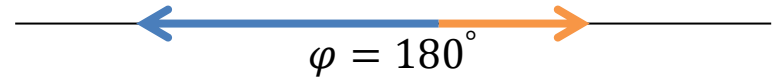
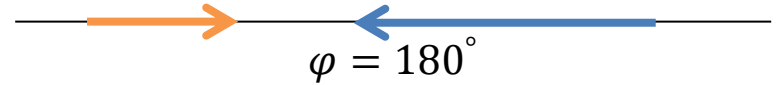
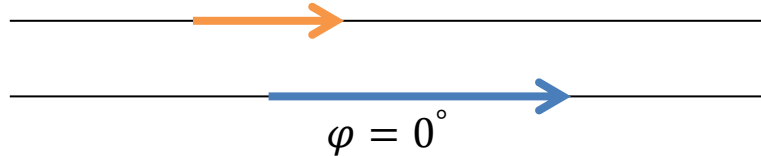
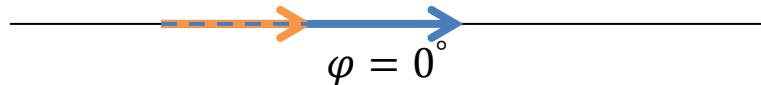
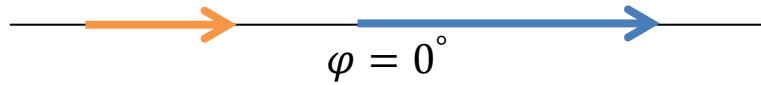
$$P = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$



Херонов образац за рачунање
површине троугла

Услов колинеарности два вектора

Подсетник: За два вектора кажемо да су **колинеарни** ако леже на истој правој или на паралелним правама.



Нека су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектори и нека је φ угао између њих. Претпоставимо још да $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нису нула-вектори.

- Ако су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни вектори $\Leftrightarrow \varphi = 0^\circ$ или $\varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- Нека је $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0^\circ$ или $\varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни вектори

$$\begin{aligned} \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ су колинеарни вектори} &\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} &\Leftrightarrow \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ су колинеарни вектори} \end{aligned}$$

Мешовити производ вектора - дефиниција

Нека су дати вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Векторски производ $\vec{a} \times \vec{b}$ је вектор, па можемо посматрати скаларни производ вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ и вектора $\vec{c}$.

Број (скалар) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ се назива **мешовити производ вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$** .

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Мешовити производ вектора

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Овај образац памтимо на следећи начин:

$$(\text{Први вектор} \times \text{Други вектор}) \cdot \text{Трећи вектор} = \begin{vmatrix} \text{Координате првог вектора} \\ \text{Координате другог вектора} \\ \text{Координате трећег вектора} \end{vmatrix}$$

$$(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Подсетимо се да детерминанта мења знак када две врсте замене места. Сада следи:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

Мешовити производ вектора

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

Како запамтити ове једнакости?

Израз $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$ се добија од израза $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ тако што вектор $\vec{a}$ прелази у вектор $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ прелази у вектор $\vec{c}$ и вектор $\vec{c}$ прелази у вектор $\vec{a}$ (дијаграм лево).

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

Израз $(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$ се добија од израза $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$ тако што вектор $\vec{b}$ прелази у вектор $\vec{c}$, вектор $\vec{c}$ прелази у вектор $\vec{a}$ и вектор $\vec{a}$ прелази у вектор $\vec{b}$ (дијаграм лево).

Мешовити производ три вектора је **инваријанта** (не мења се) у односу на циклично (кружно) пермутовање његових чинилаца.

Мешовити производ вектора

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

За скаларни производ
важи комутативност

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Мешовити производ вектора - примери

Пример: Дати су вектори $\vec{a} = (1, 5, -5)$, $\vec{b} = (2, 4, 3)$ и $\vec{c} = (0, 5, -4)$. Проверити на овом примеру једнакост $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -31 - 2 \cdot 5 = -41$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -31\vec{i} + 8\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$\vec{a} = (1, 5, -5) \quad \vec{b} \times \vec{c} = (-31, 8, 10)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 1 \cdot (-31) + 5 \cdot 8 + (-5) \cdot 10 = -31 + 40 - 50 = -41$$

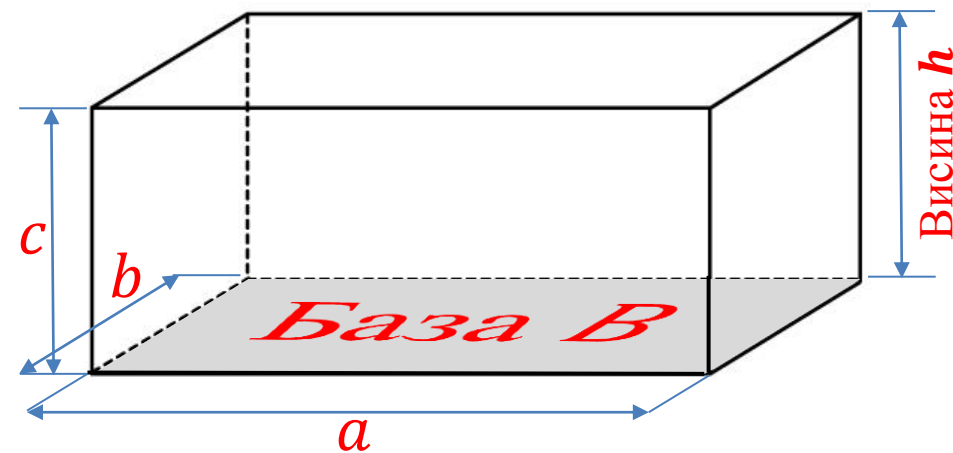
Закључак: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -41$

Пример: Израчунати вредност израза $[(\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{i} - \vec{j})] \cdot (\vec{k} - \vec{i})$.

$$\vec{i} = (1, 0, 0) \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \vec{k} = (0, 0, 1) \quad \vec{i} + \vec{j} = (1, 1, 0) \quad \vec{i} - \vec{j} = (1, -1, 0) \quad \vec{k} - \vec{i} = (-1, 0, 1)$$

$$[(\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{i} - \vec{j})] \cdot (\vec{k} - \vec{i}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Геометријска интерпретација мешовитог производа

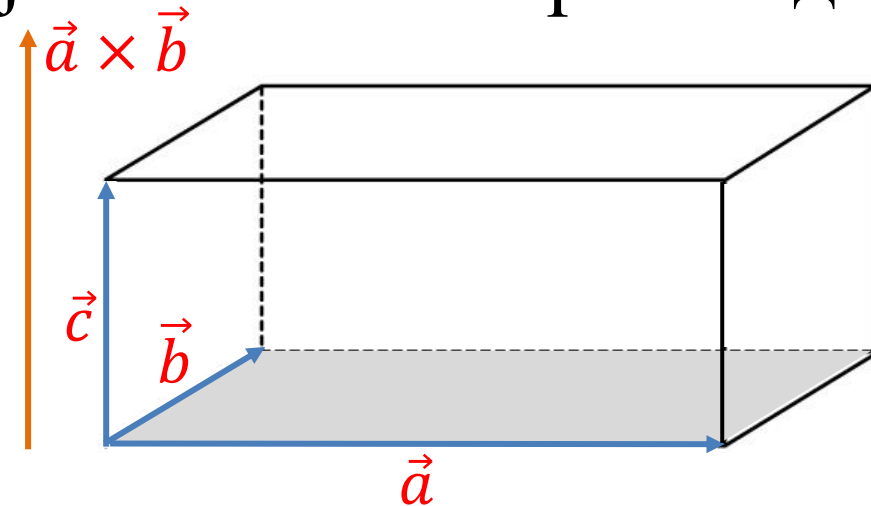


Површина базе квадра: $B = ab$

Висина квадра: $h = c$

Запремина квадра: $V = B \cdot h$

$$V = abc$$



Површина базе квадра: $B = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Висина квадра: $h = |\vec{c}|$

Угао између вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$ је $\varphi = 0^\circ$

$$V = B \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos 0^\circ$$

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Геометријска интерпретација мешовитог производа

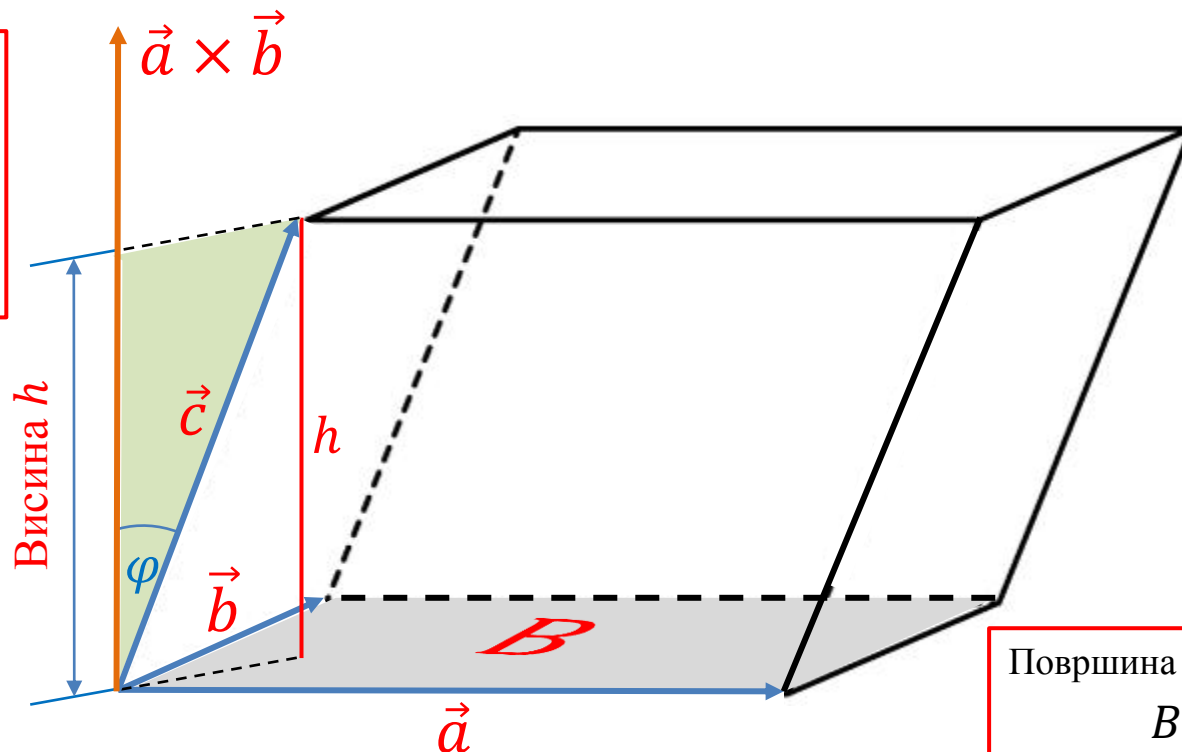
Паралелепипед је тело са шест страна и све стране су паралелограми.

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ одређују један паралелепипед (слика).

Зелени правоугли
троугао:

$$\cos \varphi = \frac{h}{|\vec{c}|}$$

$$h = |\vec{c}| \cos \varphi$$



Површина базе паралелепипеда:

$$B = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

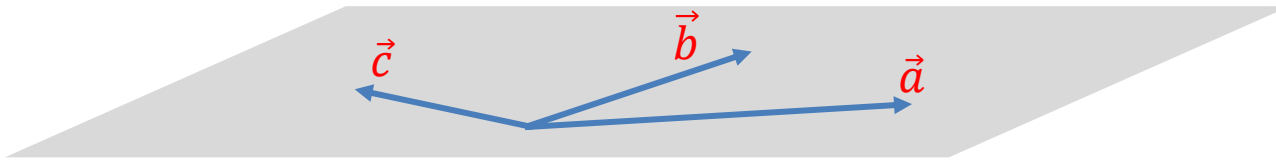
Запремина паралелепипеда: $V = B \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \varphi = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Мешовити производ може некада бити негативан број, док је запремина увек позитиван број. Због тога морамо да користимо апсолутну вредност.

Запремина паралелепипеда одређеног векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ је $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

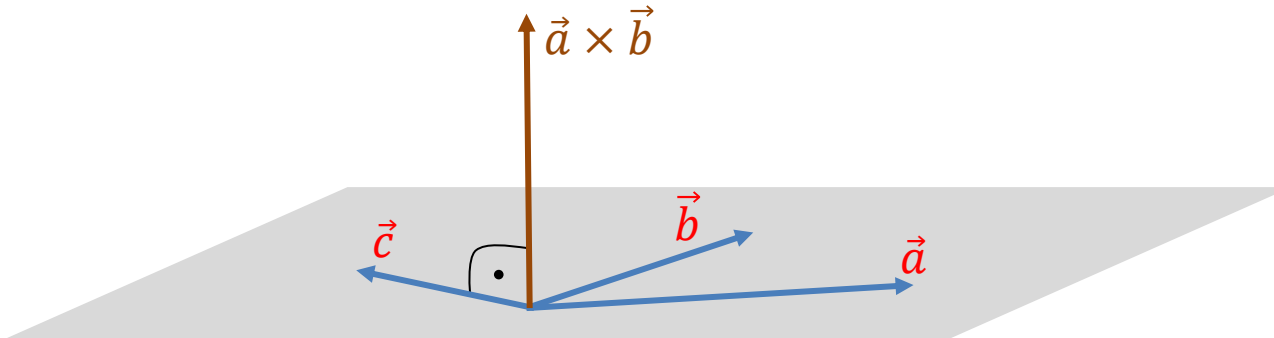
Услов компланарности три вектора

Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ су **компланарни** ако припадају истој равни.



Слика: Компланарни вектори

Ако су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарни, онда је **$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$** .



Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ је нормалан на вектор $\vec{c}$, па је **$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$** .

Ако је **$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$** онда су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарни.

Из услова $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ закључујемо да је запремина паралелепипеда који је одређен овим векторима једнака нули, а то онда значи да вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ припадају истој равни.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Вектори } \vec{a}, \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ су компланарни}$$

Мешовити производ вектора - примери

Пример: Израчунати запремину паралелепипеда конструисаног над векторима $\vec{a} = (0,1,1)$, $\vec{b} = (1,0,1)$ и $\vec{c} = (1,1,0)$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 2$$

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |2| = 2$$

Пример: Да ли су вектори $\vec{a} = (-1,3,2)$, $\vec{b} = (2,-3,-4)$ и $\vec{c} = (-3,12,6)$ компланарни?

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = \\ &= -1 \cdot 30 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 15 = 0 \end{aligned}$$

Како је $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, дати вектори су компланарни.

Пример: Дати су вектори $\vec{a} = (2,3,-2)$, $\vec{b} = (-1,4,0)$ и $\vec{c} = (3,-1,3)$. Израчунати вредност израза $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Да ли су ови вектори компланарни? Ако нису, наћи запремину паралелепипеда који је одређен њима.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-11) + 3 \cdot 11 = 55$$

Како је $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0$, онда вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ нису компланарни. Запремина паралелепипеда је $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |55| = 55$.